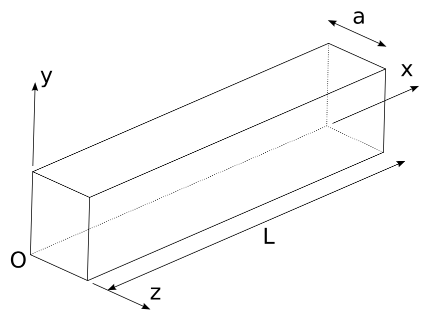
Énoncé

Exercice 1 :



Soit une poutre prismatique de longueur L et de section carrée de côté a, montrée sur la figure à droite.

Les conditions en déplacement suivantes sont appliquées :
- $u_x = 0$ au point (0, 0, 0)
- $u_y = 0$ pour la face $y = 0$, avec contact sans frottement.
- $u_z = 0$ pour la face $z = 0$, avec contact sans frottement.

Les autres surfaces sont libres de se déplacer. Il n'y a pas de force volumique. Aucune contrainte n'est appliquée à la poutre, mais celle-ci est soumise à un changement du champ de température de la forme :

$$\theta(x, y, z) = \gamma x$$

Avec γ une constante (unité K/m). On note E le module de Young, ν le coefficient de Poisson, ainsi que α le coefficient d'expansion thermique du matériau, dont la loi de comportement est linéaire, élastique et isotrope.

1. Donnez dans un tableau des conditions limites les composantes de $\underline{\underline{\sigma}}$ et de $\underline{u}$ sur les faces $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$, $x = 0$ et $x = L$ de la poutre.

L'exercice peut se résoudre par la méthode des contraintes. Étant donné qu'aucune force n'est appliquée sur la structure et que les conditions d'appui permettent la dilatation thermique, on fait l'hypothèse que $\underline{\underline{\sigma}} = 0$ dans toute la poutre.

2. Énoncez l'équation d'équilibre et montrez que le $\underline{\underline{\sigma}}$ choisi la satisfait.
3. Écrivez la loi de Hooke et donnez l'expression pour le tenseur des petites déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Montrez que ce tenseur satisfait les conditions de compatibilité de St Venant.
4. Intégrez $\underline{\underline{\varepsilon}}$ pour trouver $\underline{u}$, le champ de déplacement.
5. Quelle est l'augmentation totale de volume ΔV de la poutre ?

Exercice 2 :

On considère un rail de chemin de fer d'axe Ox, de longueur $L = 50\,\text{m}$, de section droite $S = 77\,\text{cm}^2$ (voir figure 1). Le rail est en acier et le matériau est thermoélastique linéaire isotrope (E, ν, α).

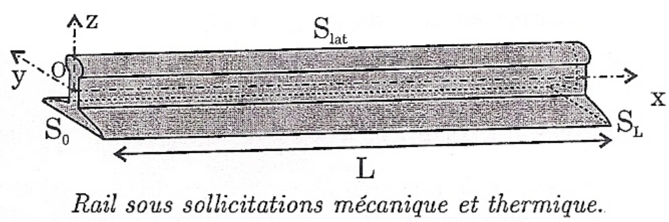


FIGURE 1 – Rail de chemin de fer

1. Cas isotherme

   La section S_0 en x=0 demeure à chaque instant en contact sans frottement avec le plan x=0. La section S_L en est en contact sans frottement avec le plan rigide qui lui impose le déplacement $\delta \underline{e_x}$. La surface latérale S_{lat} est libre de contrainte. On suppose l'évolution quasi-statique isotherme.

   (a) Ecrire les conditions aux limites
   (b) Trouver l'expression du tenseur des contraintes. Vérifier qu'il satisfait les conditions aux limites et l'équation d'équilibre.
   (c) Donner la variation de volume du rail.
   (d) En déduire la procédure expérimentale de détermination du module de Young E et du coefficient de Poisson ν.

2. Effets thermiques

   Le rail est maintenant supposé libre d'efforts et, placé au soleil, il subit un écart de température uniforme ΔT de 20 °C par rapport à sa température à l'état naturel. Le rail s'allonge de 1.5 cm.

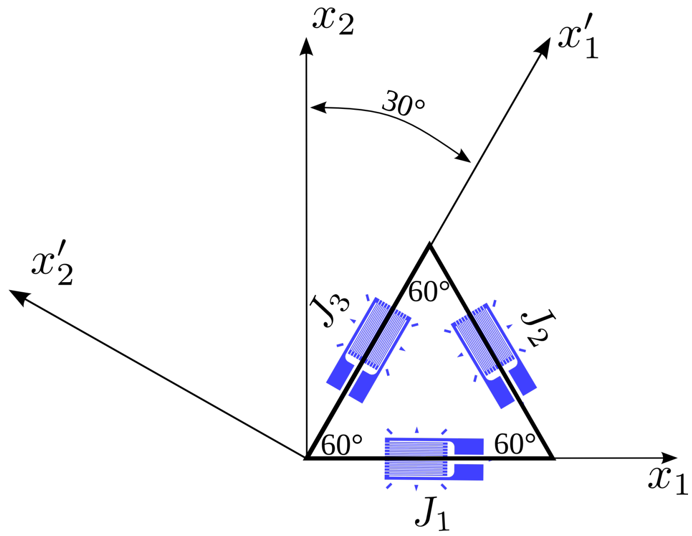
   (a) Déterminer le coefficient de dilatation thermique α.

   Le rail est maintenant posé à 25 °C. Il est dans l'impossibilité de se déformer longitudinalement (cas des rails soudés).

   (b) Déterminer les contraintes dans le rail soumis à la température hivernale de -15 °C en prenant $E = 210$ GPa et $\nu = 0.3$.
   (c) On suppose que le matériau obéit à un critère de résistance de Tresca : *Les contraintes principales σ_i telles que $\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$, permettent de calculer le cisaillement maximum $\tau_{max} = (\sigma_I - \sigma_{III})/2$. Le critère de Tresca définit le cisaillement limite τ_0 et prévoit la rupture dès que $\tau_{max} \geq \tau_0$.* Y-a-t'il risque de rupture, si $\tau_0 = 205$ MPa ?

Exercice 3 :

On considère une rosette « Delta » comme instrument de mesure de la déformation d'un solide durant une expérience :



Ce dispositif utilise trois jauges de déformation J_1, J_2 et J_3 placées en triangle équilatéral. Les mesures apportées par ces trois jauges sont :

$$\varepsilon_{J_1} = a \qquad \varepsilon_{J_2} = b \qquad \varepsilon_{J_3} = c.$$

1. Calculer ε et ε' les tenseurs des petites déformations dans les bases (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2).
2. Avons nous $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}$?